Дәріс 8. Бүтін функциялар. Лиувилль теоремасы. Морера теоремасы. Коши типтес интеграл

Анықтама. *Комплекс айнымалы* $f(z)$ *функциясы* **бүтін функция** *деп аталады, егер* $f(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ *болса.*

Коши формуласының салдары

Салдар 1

Алдыңғы лекцияда Коши формуласы енгізілді:

$$2\pi i f(z)=\int_{\partial \Omega_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$$

мұндағы $f(z)$ - голоморфтық функция.

Коши ұсынуынан орта мән туралы ұсыну шығады. Егер радиусы r болатын шеңберде голоморфтық функция берілген болса, оның осы шеңбердің ортасындағы мәні шекарадағы орташа мәнге тең:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z+r e^{i\varphi}\right) d\varphi$$

Бұл формула Коши формуласынан ауыстыру арқылы алынды:

$$\zeta=z+r e^{i\varphi}$$
$$d\zeta=i r e^{i\varphi} d\varphi$$

Радиусы r болатын диск үшін орта мән формуласы:

$$f(z)=\frac{1}{\pi r^2} \int_{D_r(z)} f(\zeta) dx \wedge dy$$

Диск үшін формуланы шеңбер формуласы арқылы алуға болады:

$$\int_0^R f(\zeta) r dr=\frac{1}{2\pi} \int_{D_R} f\left(z+r e^{i\varphi}\right) r dr dy$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{D_R} f\left(z+r e^{i\varphi}\right) r dr dy=\frac{1}{2r} \int_{D_R} f(\zeta) d(\text{ Vol })$$
$$\int_0^R f(\zeta) r dr=\frac{f(z) R^2}{2}$$

Салдар 2

Егер f функциясы қандай да бір $O(\Omega)$ аймағында голоморфтық болса, онда оның туындылары да осы аймақта голоморфтық болады.

Сонымен қатар, осы туындылар үшін Коши интегралдық түрінде ұсыну әділетті:

$$2\pi icdotf^{(n)}(z) = n! \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

Бұл формула Коши формуласының туындысын алудан шығады.
$n = 1$ үшін оны аламыз:

$$2\pi i(f(z+h) - f(z)) = h \int_{\partial\Omega} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta$$

$$h \int_{\partial\Omega} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta = \int_{\partial\Omega} f(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z - h)}$$

$$\int_{\partial\Omega} f(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z - h)} \xrightarrow[h\to 0]{} \int_{\partial\Omega} f(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}$$

$n = 2$ үшін аламыз:

$$2\pi i \frac{(f'(z+h) - f'(z))}{h} = \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{h} \left(\frac{1}{(\zeta - z - h)^2} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right) d\zeta$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{h} \left(\frac{1}{(\zeta - z - h)^2} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right) d\zeta = \frac{2h(\zeta - z) - h^2}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - h)^2}$$

$$\frac{2h(\zeta - z) - h^2}{(\zeta - z)^2(\zeta - \quad - h)^2} = \frac{2}{(\zeta - z)^3} + o(1)$$

$$2\pi i f''(z) = \int_{\partial\Omega} \frac{f'(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2}$$

$\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$ функциясын қарастырайық.

$$d\left(\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right) = \frac{f'(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2} - 2f(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^3}$$

Бұдан,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f'(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2} = \int_{\partial\Omega} \frac{df(\zeta)}{(\zeta - z)^2} + 2 \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^3}$$

Контур тұйық болғандықтан,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{df(\zeta)}{(\zeta - z)^2} = 0$$

Онда

$$2\pi i f''(z) = 2 \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^3}$$

Салдар 3 (Лиувилль теоремасы)

Лиувилль теоремасы. Егер $f(z)$ функциясы $O(\mathbb{C})$ аймағында голоморфтық және $\forall z \in \mathbb{C}$ үшін $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$ болатын M саны бар болса, онда $f(z) \equiv$ тұрақты.

Дәлел:

Формуланың

$$2\pi i f'(z) = \int_{\partial D_R(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

z нүктесін қамтитын кез келген контур үшін дұрыс екендігін болжамдайық.

$$|2\pi i f'(z)| \leq \frac{M}{R^2} 2\pi R$$

$$\frac{M}{R^2} 2\pi R \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Олай болса,

$$f'(z) = 0$$

Сондықтан $f(z) \equiv$ тұрақты.

Арнайы жағдайды қарастырайық. $f(z) \in O(\mathbb{C})$ және $|f(z)| \leq M|z|^\alpha \forall z \in \mathbb{C}, \alpha > 0$ болсын. Онда f дәрежесі $\leq [\alpha]$ болатын көпмүшелік. Онда

$$2\pi i \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(z) = n! \int_{\partial D_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

$$\left| 2\pi i f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{M R^\alpha}{R^n} 2\pi R$$

$$\frac{M R^\alpha}{R^n} 2\pi R \to 0$$

Олай болса,

$$f^{(n)}(z) = 0$$

Онда $f^{(n-1)}(z) \equiv$ тұрақты, $f^{(n-2)}(z)$ - сызықтық функция, әрі қарай осылай жалғасады.

Салдар 4 (Морера теоремасы)

Морера теоремасы. $f \in C(\bar{\Omega})$ болсын, және

$$\int_C f(z)dz = 0$$

мұндағы C - тұйық контур. Онда $f \in O(\Omega)$
Дәлел:
Болсын

$$F(z) = \int_*^z f(\zeta)d\zeta$$

мұндағы $*$ - кейбір тұрақты нүкте.
Қарастырайық

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(\zeta)d\zeta$$

Онда

$$\int_z^{z+h} f(\zeta)d\zeta = \int_z^{z+h} f(z)d\zeta + \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z))d\zeta$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : |\zeta - z| < \delta \to |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

$$\int_z^{z+h} f(z)d\zeta = f(z)h$$

$$F'(z) = f(z)$$

$F'(z)$ - голоморфтық функция, олай болса $f(z)$ да - голоморфтық функция.

Салдар 5 (Коши теоремасы)

Коши теоремасы. Егер $D(z)$ орталығы z нүктесінде орналасқан диск функцияның голоморфтығының аймағында жатса:

$$D(z) \subset \Omega$$

$$f \in O(D)$$

Онда

$$f(z+h) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$
$$c_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$$
$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

Дәлел:
Болсын

$$|q| < 1$$

Онда

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$
$$(1-q) \sum_{n=0}^{N} q^n = 1 - q^{N+1}$$
$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$
$$\frac{1-q^{N+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}$$

Бұл есептеуді біздің жағдайда қолданайық. Бізде бар:

$$2\pi i f(z+h) = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z - h} d\zeta$$
$$|h| < |\zeta - z|$$
$$|\zeta - z| = R$$

мұндағы R - диск радиусы.

$$\frac{1}{\zeta - z - h} = \frac{1}{(\zeta - z)\left(1 - \frac{h}{\zeta - z}\right)}$$
$$\frac{h}{\zeta - z} = q$$

Онда

$$\frac{1}{(\zeta - z)\left(1 - \frac{h}{\zeta - z}\right)} = \frac{1}{(\zeta - z)}\left(1 + \frac{h}{\zeta - z} + \frac{h^2}{(\zeta - z)^2} + \cdots\right)$$

Бұл қатар бiрқалыпты жинақты болғандықтан, оны мүшелеп интегралдауға болады:

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z - h} d\zeta = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} h^n d\zeta$$
$$\int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} h^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi i \frac{f^{(n)}(z)}{n!} h^n$$

Сонымен, бiз мынаны аламыз:

$$f(z+h) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$
$$c_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$$

Ескерту. Егер

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Онда

$$\frac{1}{R} := \overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{\frac{1}{n}}$$

- Қатар $|z| < R$ болғанда жинақталады
- Қатар $|z| > R$ болғанда жинақталмайды
- $f(z)$ $D_R(0)$ аймағында голоморфтық
- $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$